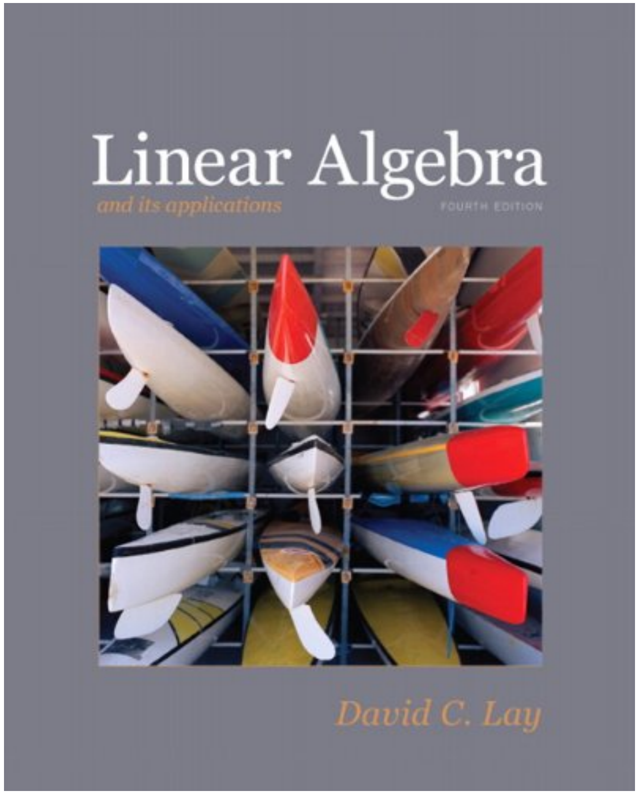
CEU
Universidad
San Pablo

Tema 4: Espacios vectoriales

Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed)*.
Chapter 4,6.

Índice de contenidos

Espacio vectorial

Definición: Espacio vectorial

Un ***espacio vectorial*** es un conjunto no vacío, ***V***, de objetos (llamados *vectores*) en el que definimos 2 operaciones: la suma entre vectores y la multiplicación por un escalar, y que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\forall c, d \in \mathbb{K}$ se verifica que:

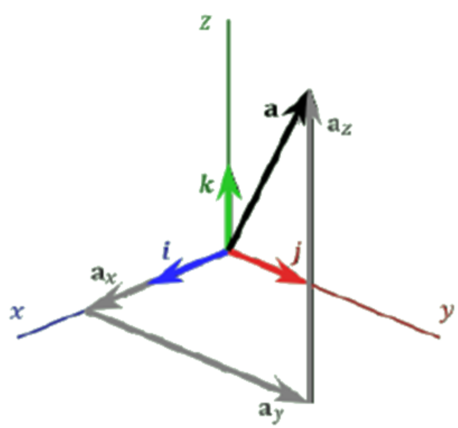
1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. $\exists \mathbf{0} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V \ \ \exists! \, \mathbf{w} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ $(\textit{normalmente escrito como } \mathbf{w} = -\mathbf{u})$
6. $c\mathbf{v} \in V$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Espacio vectorial

Teorema: otras propiedades

11. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
12. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
13. $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$



$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión finita para cualquier n. Igual que $\mathbb{C}^n$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Definición: Subespacio de $\mathbb{R}^n$

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si:

1. $\mathbf{0} \in H$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ → *H* está cerrado bajo la suma de vectores
3. $\forall \mathbf{u} \in H, \forall r \in \mathbb{R}, \ r\mathbf{u} \in H$ → *H* está cerrado bajo la multiplicación por un escalar

Ejemplo: subespacios especiales

Los siguientes 2 conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$:

1. $H = \{\mathbf{0}\}$
2. $H = \mathbb{R}^n$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo: Plano

Un plano está definido como: $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2\}$

Este plano es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Demostración

1. Demostrar $\mathbf{0} \in H$ → Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. Demostrar $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ →

$$\mathbf{u} \in H \Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{v} = \lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2$$
$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2) + (\lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_{1u} + \lambda_{1v})\mathbf{v}_1 + (\lambda_{2u} + \lambda_{2v})\mathbf{v}_2 \in H \end{aligned}$$

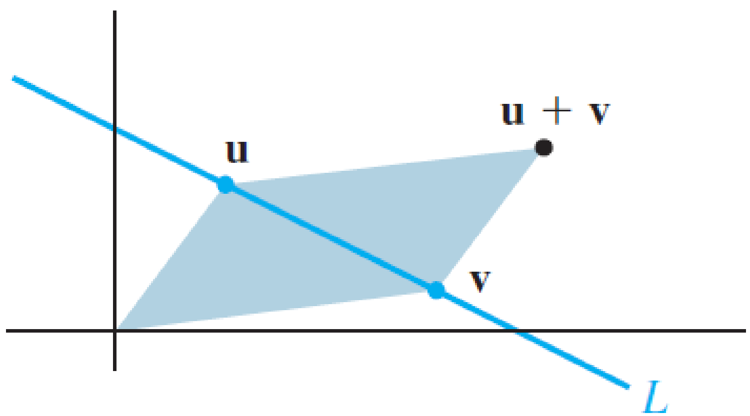
3. Demostrar $r\mathbf{u} \in H$ →

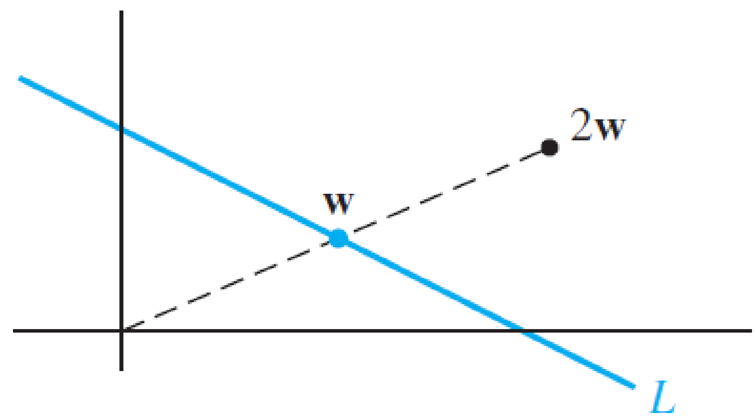
$$\mathbf{u} \in H \Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2$$
$$\begin{aligned} r\mathbf{u} &= r(\lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2) \\ &= r\lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + r\lambda_{2u}\mathbf{v}_2 \in H \end{aligned}$$

Ejemplo: Recta que no pasa por el origen

Una recta (L) que no pasa por el origen, no es un subespacio, porque

1. $\mathbf{0} \notin L$
2. Si tomamos 2 puntos de la recta ($\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$), $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin L$
3. Si tomamos un punto de la recta ($\mathbf{w}$), $2\mathbf{w} \notin L$





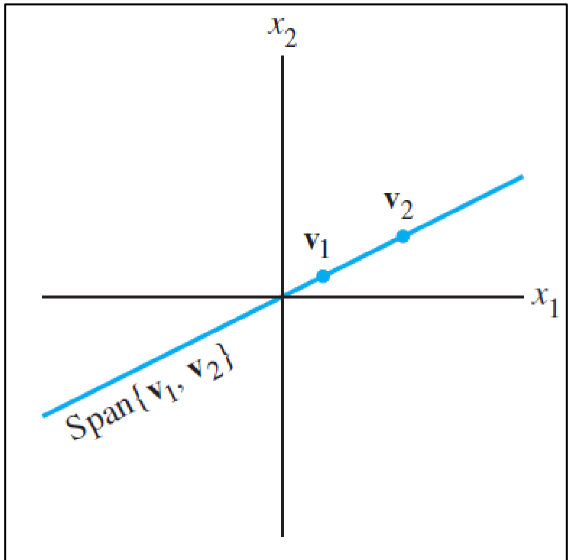
CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Recta que pasa por el origen

Consideremos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$. Entonces,

$$H = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1\}$$

es una recta. Es fácil de probar que esta recta es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.



$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$.

Subespacio vectorial

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ porque $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, pero $\mathbf{u} \notin \mathbb{R}^3$.

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2$ x $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ porque todos los vectores de H son de la forma $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es obvio que H "parece" $\mathbb{R}^2$. Esta semejanza es llamada matemáticamente isomorfismo.

Ejemplo

Cualquier plano en 3D, que pase por el origen, es un subespacio $\mathbb{R}^3$.
Cualquier plano en 3D, que NO pase por el origen, NO es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, porque el **0** no pertenece al plano

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sean v_1, $v_2 \in V$ dos vectores de un espacio vectorial V. El subconjunto

$$H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

es un subespacio de V.

Demostración

Cualquier vector de H es de la forma $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ para cualquier $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

- Demostración a) $0 \in H$
  Simplemente estableciendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tenemos $\mathbf{0} \in H$
- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = \lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v} = \lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2) + (\lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_{1u} + \lambda_{1v})\mathbf{v}_1 + (\lambda_{2u} + \lambda_{2v})\mathbf{v}_2 \in H \end{aligned}$$

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo (…continuación)

- Demostración c) $c\mathbf{u} \in H$

Sea $\mathbf{u} \in H \;\Rightarrow$

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \;\Rightarrow\; c\mathbf{u} = c(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2) = c\lambda_1\mathbf{v}_1 + c\lambda_2\mathbf{v}_2 \;\in H$$

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ p vectores de un espacio vectorial V. El subconjunto

$$H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

es un subespacio de V.

Demostración

Análoga a la anterior demostración

Ejemplo

Consideremos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4 \supset H = \{(a-3b, b-a, a, b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$
¿Es un subespacio vectorial?

Solución

Todos los vectores de *H* pueden ser escritos como

$$H \ni \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

Por lo tanto, $H = \mathrm{Span}\{(1,-1,1,0), (-3,1,0,1)\}$ y por el teorema previo, es un subespacio vectorial

Ejemplo

Sea $H = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix} \right\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sea $H = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \right\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

Solución

Podemos reescribir las condiciones de pertenencia a H como:

$$\begin{array}{l} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

y, gracias al teorema previo, H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios I
  - Ejercicio 4.1.1
  - Ejercicio 4.1.2
  - Ejercicio 4.1.10
  - Ejercicio 4.1.12
  - Ejercicio 4.1.15

Índice de contenidos

- Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- Bases
- Espacio vectorial con el producto interior

CEU Universidad San Pablo

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Definición: Espacio columna de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Sean $a_i \in \mathbb{R}^m$ las columnas de la matriz A. El **espacio columna** de A se define como:

$$\mathrm{Col}\{A\} = \mathrm{Span}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Teorema

$\mathrm{Col}\{A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Ejemplo

Encontrar una matriz A tal que $\mathrm{Col}\{A\} = \{(6a - b, a + b, -7a)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Solución

Podemos expresar los puntos de Col{A} como:

$$\mathrm{Col}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6a - b \\ a + b \\ -7a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, Col{A} = Span{ (6, 1, -7), (-1, 1, 0) }. Es decir, estas deben ser las 2 columnas de A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si $\mathbf{b}$ pertenece al $\mathrm{Col}\{A\}$.

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si $\mathbf{b}$ pertenece al $\mathrm{Col}\{A\}$.

Solución:

Si $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}\{A\}$ deberán existir unos coeficientes x_1, x_2 y x_3 tales que:

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3}$$

Para encontrar esos coeficientes, resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De hecho, hay infinitas soluciones al sistema de ecuaciones y, por lo tanto, $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}\{A\}$

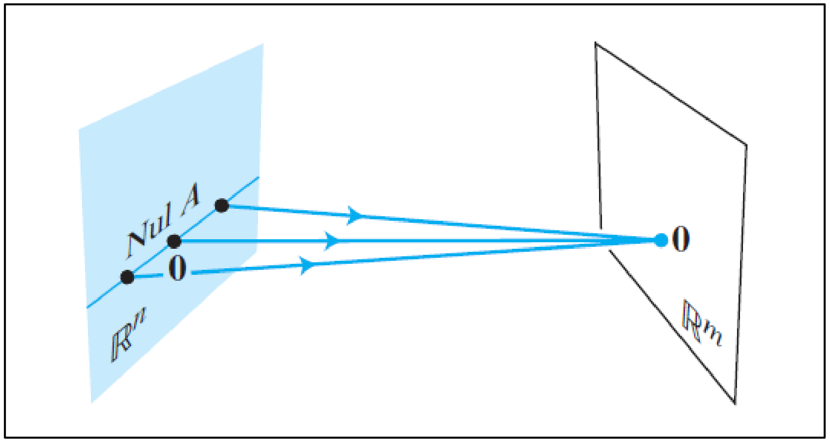
CEU Universidad San Pablo

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Definición: Espacio nulo de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\,\mathrm{x}\,n}$. El **espacio nulo** de A se define como:

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$



Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

El punto **x** = (5, 3, -2) tiene la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

CEU Universidad San Pablo

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo (…continuación)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \left\{\left(-\frac{5}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_3, x_3\right) \; \forall x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

El ejemplo previo ($\mathbf{x}$ = (5, 3, -2)) es el punto obtenido para $x_3 = -2$

CEU Universidad San Pablo

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Teorema

$\mathrm{Nul}\{A\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Demostración

Es obvio que $\mathrm{Nul}\{A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ porque A tiene n columnas

- Demostración a) $\mathbf{0} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  $A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m \Rightarrow \mathbf{0}_n \in \mathrm{Nul}\{A\}$

- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ A\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$

  $$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\}$$

- Demostración c) $c\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  Sea $\mathbf{u} \in H \Rightarrow$

  $$A\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow c\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}\{A\}$$

Comparación entre espacio nulo y espacio columna

Contrast Between Nul A and Col A for an m x n Matrix A

Nul A	Col A
1. Nul A is a subspace of $\mathbb{R}^n$.	**1.** Col A is a subspace of $\mathbb{R}^m$.
2. Nul A is implicitly defined; that is, you are given only a condition ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) that vectors in Nul A must satisfy.	**2.** Col A is explicitly defined; that is, you are told how to build vectors in Col A.
3. It takes time to find vectors in Nul A. Row operations on $[\,A \quad \mathbf{0}\,]$ are required.	**3.** It is easy to find vectors in Col A. The columns of A are displayed; others are formed from them.
4. There is no obvious relation between Nul A and the entries in A.	**4.** There is an obvious relation between Col A and the entries in A, since each column of A is in Col A.
5. A typical vector $\mathbf{v}$ in Nul A has the property that $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.	**5.** A typical vector $\mathbf{v}$ in Col A has the property that the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ is consistent.
6. Given a specific vector $\mathbf{v}$, it is easy to tell if $\mathbf{v}$ is in Nul A. Just compute $A\mathbf{v}$.	**6.** Given a specific vector $\mathbf{v}$, it may take time to tell if $\mathbf{v}$ is in Col A. Row operations on $[\,A \quad \mathbf{v}\,]$ are required.
7. Nul $A = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.	**7.** Col $A = \mathbb{R}^m$ if and only if the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution for every $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^m$.
8. Nul $A = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one.	**8.** Col $A = \mathbb{R}^m$ if and only if the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ maps $\mathbb{R}^n$ *onto* $\mathbb{R}^m$.

Ejercicios

- Tema 3_Enunciados de ejercicios VII
  - Ejercicio 2.8.1
  - Ejercicio 2.8.2
  - Ejercicio 2.8.5
  - Ejercicio 2.8.8
  - Ejercicio 2.8.10

Índice de contenidos

- Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- Bases
- Espacio vectorial con el producto interior

Base de un subespacio

Definición: Base de un subespacio

Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto de vectores B es una base de H si:

1. Todos los vectores en B son linealmente independientes
2. $H = \text{Span}\{B\}$

Base estándar de $\mathbb{R}^n$

Sean los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto $B = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$ es la **base estándar** de $\mathbb{R}^n$

Base de un subespacio

Ejemplo

Sea H = Span{ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ } con $\mathbf{v}_1=(0, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3=(6, 16, -5)$. Encontrar una base para H

Base de un subespacio

Ejemplo

Sea H = Span{ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ } con $\mathbf{v}_1$=(0, 2, -1), $\mathbf{v}_2$=(2, 2, 0), $\mathbf{v}_3$=(6, 16, -5). Encontrar una base para H

Solución

Todos los vectores en H son de la forma:

$$H \ni \mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Nos damos cuenta que $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, por lo tanto, $\mathbf{v}_3$ es redundante:

$$\begin{aligned} H \ni \mathbf{x} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3(5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \\ &= (c_1 + 5c_3)\mathbf{v}_1 + (c_2 + 3c_3)\mathbf{v}_2 \\ &= c_1'\mathbf{v}_1 + c_2'\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Es suficiente construir nuestra base de H con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Base de un subespacio

Ejemplo

- { (1,0,0), (2,3,0) } es un conjunto de 2 vectores linealmente **independientes**. Pero no pueden generar $\mathbb{R}^3$ porque para eso, necesitamos 3 vectores
- { (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6) } es un conjunto de 3 vectores linealmente **independientes** que generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^3$
- { (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6), (7,8,9) } es un conjunto de 4 vectores linealmente dependientes que generan $\mathbb{R}^3$, pero que no son una base

CEU Universidad San Pablo

Bases para Nul{A} y Col{A}

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$(A|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En azul se muestran las columnas pivote, de las cuales hemos aprendido que:

$$\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{array} \Rightarrow \mathrm{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

CEU Universidad San Pablo

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo (…continuación)

$$\mathrm{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la base del **Nul{*A*}** es { (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) }:

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo

Si consideramos $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior, tenemos que :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Si llamamos *B* a la matriz anterior, entonces la columnas no-pivote podemos escribirlas como una combinación lineal de las columnas pivote:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= -2\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_4 &= -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_5 &= 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo (…continuación)

Dado que las operaciones por filas no cambian la dependencia lineal entre las columnas de una matriz, podemos derivar las mismas relaciones para la matriz *A*:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= -2\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 &= -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_5 &= 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Finalmente, la base del **Col{*A*}** es { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ }.

$$\mathrm{Col}\{A\} = \mathrm{Span}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Teorema

Las columnas pivote de A forman una base de $\mathrm{Col}\{A\}$

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo

Encontrar una base para el espacio nulo de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Encontrar una base para el espacio nulo de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Solución

El espacio nulo de *A* son todos aquellos vectores que satisfacen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$[A \quad \mathbf{0}] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 \quad\quad - \quad x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que, la solución general es (en forma vectorial paramétrica):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} = x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w}$$

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo (…continuación)

El conjunto B = { **u**, **v**, **w** } = { (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) } es una base de **Nul{*A*}**. Por construcción, estos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Espacio Nulo y sistemas de ecuaciones

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- {$\mathbf{e}_3$} es una base del Nul{*A*}
- Consideremos **b** = (7, 3, 0). La solución general de *A***x** = **b** es de la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{x}_{\boldsymbol{Nul}}$$

donde $\mathbf{x}_0$ es una solución de *A***x** = **b** que no pertenece al Nul{*A*} y $\mathbf{x}_{nul}$ pertenece al Nul{*A*}. Para este caso particular,

$$\mathbf{x} = (7,3,0) + x_3\mathbf{e_3}$$

Ejemplo

Encontrar una base para el espacio columna de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

De las columnas que no tienen pivote de la matriz *B*, sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_4 &= 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

Entonces,
$$\begin{aligned} \mathrm{Col}\{B\} &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \middle| \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 + x_5\mathbf{b}_5\right\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{rcl} \mathbf{v} &=& x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + \\ && x_4(5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + x_5\mathbf{b}_5 \end{array}\right\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \middle| \mathbf{v} = x_1'\mathbf{b}_1 + x_2'\mathbf{b}_2 + x_5\mathbf{b}_5\right\} \end{aligned}$$

Y, por lo tanto: $\mathbf{Basis}\{\mathbf{Col}\{B\}\} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5\}$

Ejemplo

Encontrar una base para el espacio columna de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$

Solución

Resulta que $A \sim B$ (*B* del ejemplo anterior). Dado que las operaciones por filas no afectan la relaciones de independencia lineal entre las columnas de la matriz, deberíamos tener que:

$$\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_4 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

Y, por lo tanto, $\textbf{Basis}\left\{\textbf{Col}\{A\}\right\} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$

Base para subespacio

Ejemplo

Sea $H = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \right\}$. Encontrar una base para este subespacio.

Podemos reescribir las condiciones de pertenencia a *H* como:

$$\begin{array}{l} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son todos los puntos de la forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}d - c \\ 2c - \frac{1}{3}d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, *H* = Span{ (-1, 2, 1, 0), (1/3, -1/3, 0, 1) }.

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios III
  - Ejercicio 4.3.1
  - Ejercicio 4.3.8
  - Ejercicio 4.3.11
  - Ejercicio 4.3.12
  - Ejercicio 4.3.13

Índice de contenidos

- Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- Bases
- Espacio vectorial con el producto interior

Espacio vectorial con el producto interior

Definición: Producto interior

El producto interior sobre un espacio vectorial V, es la función <u,v> que asigna un número real a cada par de vectores u y v, y cumple:

1. $< u, v > = < v, u >$
2. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$
3. $< cu, v > = \mathrm{c} < u, v >$
4. $< u, u > \geq 0 \; y < u, u > = 0 \; si \; y \; solo \; si \; u = 0$

Espacio vectorial con el producto interior

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $< u, v > = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$ es un producto interior.

Demostración:

1. $< u, v > = 4u_1v_1 + 5u_2v_2 = < v, u >$
2. $<u + v, w > = 4(u_1 + v_1)w_1 + 5(u_2+v_2)w_2 = 4u_1w_1 + 5u_2w_2 + 4v_1w_1 + 5v_2w_2 =$ $< u, w > + < v, w >$
3. $< cu, v > = 4cu_1v_1 + 5cu_2v_2 = c \cdot (4u_1v_1 + 5u_2v_2) = \mathrm{c} < u, v >$
4. $< u, u > = 4u_1^2 + 5u_2^2 \geq 0 \; y < u, u > = 0 \; si \; y \; solo \; si \; u_1 = 0 \; y \; u_2 = 0 \; (u = 0)$

Espacio vectorial con el producto interior

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $< u, v > = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 3u_2 v_2$ es un producto interior.

Demostración:

Demostración analoga a la de ejemplo anterior

Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar

- Dados dos vectores **v**, **w** $\in \mathbb{R}^n$, el producto escalar entre ambos se define como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \mathbf{w}_n$$

- Este producto cumple las propiedades 1-4 de producto interior (demostración analoga a la de ejemplo anterior)

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios IV
  - Ejercicio 6.7.1
  - Ejercicio 6.7.13
  - Ejercicio 6.7.15